Egzamin z Matematyki Obliczeniowej, II rok Mat.

(*Ściśle tajne* przed godz. 14:00 22 czerwca 2024.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Bardzo duży wpływ na ocenę będzie miała czytelność rozwiązań i poprawność uzasadnienia każdej odpowiedzi.

1. a) Metodą różnic dzielonych znajdź wielomian w stopnia co najwyżej 3 spełniający warunki interpolacyjne podane w tabelce, przedstawiając go w odpowiedniej bazie bazie Newtona.

x	0	2
$w(x)$	1	-2
$w'(x)$	5	10

Oblicz za pomocą różnic dzielonych $w''(0)$ i $w'''(0)$.

b) W konstrukcji interpolacyjnej kubicznej funkcji sklejanej s z węzłami $u_0 < \cdots < u_N$ w dodatku do warunków interpolacyjnych $s(u_i) = a_i$ dla $i = 0, \ldots, N$ należy podać warunki brzegowe — po jednym dla każdego końca przedziału $[u_0, u_N]$. Niech $s'(u_i) = b_i$ dla każdego i. Za pomocą różnic dzielonych wyprowadź równanie, w którym występują dane a_0, a_1 i niewiadome b_0, b_1, opisujące warunek $s'''(u_0) = d_0$.

2. Niech $f(x) = e^x$.

a) Znajdź minimalny stopień wielomianu interpolacyjnego p opartego na węzłach Czebyszewa w przedziale $[-1, 1]$, przybliżającego funkcję f w tym przedziale z błędem mniejszym niż 10^{-8}.

b) Jak zmieni się błąd aproksymacji w przedziale $[-1, 1]$, jeśli zostanie skonstruowany wielomian interpolacyjny q z taką samą liczbą węzłów Czebyszewa w przedziale $[0, 1]$, po czym do przybliżania funkcji f w przedziale $[0, 1]$ będzie używany wielomian q, a w przedziale $[-1, 0]$ funkcja wymierna $\frac{1}{q}$?

3. a) Znajdź pierwsze cztery wielomiany z rodziny wielomianów ortogonalnych dla iloczynu skalarnego określonego wzorem

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)g(x)x\,dx.$$

Możesz dokonać tego przez ortogonalizację Grama–Schmidta bazy potęgowej lub za pomocą formuły trójczłonowej.

b) Znajdź wielomian p^* stopnia co najwyżej 3, będący optymalnym przybliżeniem funkcji $f(x) = x^4$ w sensie aproksymacji średniokwadratowej, w normie związanej z podanym wyżej iloczynem skalarnym. Wielomian p^* przedstaw w znalezionej bazie ortogonalnej.

4. a) Znajdź węzły i współczynniki kwadratury Gaussa czwartego rzędu, przybliżającą funkcjonał

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)x\,dx.$$

b) i znajdź wzór na oszacowanie błędu tej kwadratury dla funkcji klasy $C^4[-1,1]$.

Wskazówka: Możesz skorzystać z rozwiązania poprzedniego zadania.